Доказательство аналогичное доказательству реконструкции системы с конечным числом запаздываний.

<u>Замечания</u>. Можно исследовать реконструкцию системы (1), без предположения о сходимости матричных рядов. В этом случае возникают проблемы с определением n_j, k_j, что связано с понятием линейной зависимости векторов в векторном пространстве формальных матричных рядов.

УДК 517.95

Е.А. Акжигитов, канд. физ.-мат. наук, доц.
(Казахский агротехнический университет им С.Сейфуллина)

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть Ω - открытый прямоугольник в R^2 :

$$\Omega = \{(x, y): \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1\}$$

В области Ω рассмотрим вырождающееся эллиптическое уравнение

$$Lu + \lambda u = -\frac{\partial}{\partial x}\left(K(y)\, a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda u = f(x, y), \qquad (1)$$

где $K(y) \in C_{+0}$, $a(x)$ - непрерывная на отрезке [0,1] вещественная функция, удовлетворяющая условию

$$a(0) = 0, \quad a(x) > 0 \text{ при } x > 0 \qquad (2)$$

Из условия (2) видно, что вырождение в окрестности точки $0(0,0) \in \partial\Omega$ происходит неравномерно. Поэтому, обычно, в зависимости от коэффициента $a(x)$, ставят следующие краевые задачи:

1) если

$$\int_0^1 \frac{dx}{a(x)} < \infty, \qquad (*)$$

то требуется найти функцию $u(x, y)$ удовлетворяющую уравнению (1) и условиям:

$$\begin{cases} u(x,0) = u(x,1) = 0 \\ u(0,y) = u(1,y) = 0 \end{cases}; \qquad (3)$$

2) если $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{a(x)} = \infty, \quad \int_0^1 \frac{x\,dx}{a(x)} < \infty$ (**)

то ищется функция $u(x, y)$ удовлетворяющая (1) и условиям:

$$\begin{cases} u(x,0) = u(x,1) = 0 \\ u(1,y) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

Теорема. Пусть $K(y) \in$ и $\rho(y) \in$, а для функции $a(x)$ справедливо условие (*), ((**)).

Тогда при $\lambda > 0$ верны следующие утверждения:

а) для любого $f \in L_2(\Omega)$ существует в $L_2(\Omega)$ единственное сильное решение задачи (1),(3), ((1),(4)).

б) оператор $K(y)T_x(L+\lambda)^{-1}$ ограничен в $L_2(\Omega)$;

в) оператор $\rho(y)T_x^{\alpha}(L+\lambda)^{-1}$ вполне непрерывен в $L_2(\Omega)$, если $\rho(y) \sim K(y)$ и $0 \le \alpha$.

Доказательство теоремы:

а). Рассмотрим квадратичную форму

$(Lu + \lambda u, u)$ для $u \in C_0^{\infty}(\Omega)$

В силу (3) имеем:

$$(Lu + \lambda u, u) = \int_{\Omega} K(y)a(x)|u_x|^2 dxdy + \int_{\Omega} |u_y|^2 dxdy + \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dxdy$$

Используя неравенство Коши- Буняковского и условия (3), получим

$$\|Lu + \lambda u\|_{L_2(\Omega)} \ge \lambda \|u\|_{L_2(\Omega)} \tag{5}$$

Если

$$f_k(x,y) = \sum_{n=-k}^{k} f_n(y) z_n(x), \tag{6}$$

где $z_n(x)$ - собственные функции оператора T, то легко видеть, что функция

$$u_k(x,y) = (L+\lambda E)^{-1} f_k(x,y) = \sum_{n=-k}^{k} (L_n + \lambda E)^{-1} f_n(y) z_n(x)$$

является решением задачи (1),(3),((1),(4)).

Так как множество вида (5) плотно в $L_2(\Omega)$, то последовательность $u_k(x,y)$ фундаментальна в $L_2(\Omega)$ и в силу полноты $L_2(\Omega)$ сходится к $u(x,y) \in L_2(\Omega)$.Из полученных соотношений получим, что $u(x,y)$ решение задачи (1),(3) ,((1),(4)).

Доказательство пунктов б),в).

Отметим, что если $f(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(y) e^{inx}$, то

$$u(x,y) = (L+\lambda)^{-1} f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (l_n + \lambda)^{-1} f_n(y) e^{inx}.$$

Отсюда и из ортонормированности системы $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ в $L_2(0,1)$, следует соотношение

$$\left\|\rho(y)T_x^{\alpha}(L+\lambda I)^{-1}\right\|_{L_2\to L_2} = \sup_n \left\|\lambda^{\alpha}\rho(y)(A_n+\lambda I)^{-1}\right\|_{L_2\to L_2}, \qquad (7)$$

где $\rho(y) \sim K(y)$.

Так как для каждого n оператор $(A_n+\lambda I)^{-1}$ вполне непрерывен, то из (7) и известных теорем для вполне непрерывных операторов [1] следует, что оператор $\rho(y)T_x^{\alpha}(L+\lambda I)^{-1}$ вполне непрерывен тогда и только тогда, когда

$$\overline{\lim_{|n|\to\infty}}\left\|\rho(y)\lambda^{\alpha}(A_n+\lambda I)^{-1}\right\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} = 0$$

или что, то же самое

$$\lim_{|n|\to\infty}\left(\left\|\rho(y)\lambda^{\alpha}(A_n+\lambda I)^{-1}\right\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)}\right)^{-1} = \infty$$

Но величина

$$\mu_{(|n|,\rho(y))} = \left\|\rho(y)\lambda^{\alpha}(A_n+\lambda I)^{-1}\right\|^{-1}_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \qquad (8)$$

допускает оценки:

$$C^{-1}\lambda^{1-\alpha} \le \mu_{(|n|,\rho(y))}$$

из которых вытекает утверждение теоремы о вполне непрерывности оператора $\rho(y)T_x^{\alpha}(L+\lambda I)^{-1}$ доказана.

Утверждение об ограниченности $K(y)T_x(L+\lambda I)^{-1}$ следует из (7) и (8). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1 Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.-М.,-1980.-664 с.

2 Кальменов Т.Ш., Отелбаев М.О. О гладкости решений одного класса вырождающихся эллиптических уравнений // Дифференциальные уравнения,-1977.-т.13, № 7. с.1244-1255.

3 Акжигитов Е. О первой краевой задаче для одного класса неравномерно вырождающихся эллиптических уравнений. // Современные методы в теории краевых задач. Понтрягинские чтения-IX.Воронеж.-1998.